

第七章 随机变量及其分布

7.1 条件概率与全概率公式

7.1.1 条件概率

刷基础

1. C 【解析】设事件 A = “抽到的学生喜欢文学阅读”，事件 B = “抽到的学生喜欢科普阅读”，由题意得 $P(A) = 0.75$, $P(AB) = 0.3$, 则 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.75} = 0.4$. 故选 C.

2. D 【解析】对于 A, 当 B 与 C 不是两个互斥事件时, $P((B+C)|A) = P(B|A) + P(C|A)$ 不成立, A 错误; 对于 B, 条件概率的范围应该为 $0 \leq P(B|A) \leq 1$, B 错误;

对于 C, 因为 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, 若 $P(B|A) = P(A|B)$, 则 $\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$, 所以 $P(AB) = 0$ 或 $P(A) = P(B)$, C 错误;

对于 D, 若 $B \subseteq A$, 则 $P(AB) = P(B)$, 所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$, D 正确.

故选 D.

3. D 【解析】既有算法工程师又有实习生的安排方法有 $C_2^1 C_6^4 + C_2^2 C_6^3 = 50$ (种), 其中工程师甲被选中的安排方法有 $C_6^4 + C_1^1 C_5^3 = 35$ (种), 所以在攻坚小组中既有算法工程师又有实习生的条件下, 工程师甲被选中的概率为 $\frac{35}{50} = \frac{7}{10}$. 故选 D.

4. D 【解析】设“甲、乙共投中 3 次”为事件 C , “甲恰好投中 2 次”为事件 D , 则 $P(C) = (0.6 \times 0.7 + 0.4 \times 0.3) \times 0.8 \times 0.2 + (0.8 \times 0.8 + 0.2 \times 0.2) \times 0.6 \times 0.3 = 0.2088$.

【点悟】事件 C 包含乙两次都投中、甲投中 1 次和乙投中 1 次、甲两次都投中两种情况

$P(CD) = (0.8 \times 0.8 + 0.2 \times 0.2) \times 0.6 \times 0.3 = 0.1224$, 故 $P(D|C) = \frac{P(CD)}{P(C)} = \frac{0.1224}{0.2088} = \frac{17}{29}$. 故选 D.

5. 【解】(1) 从甲、乙两个盒内各任取 2 个球的试验的样本空间 Ω_1 有 $C_5^2 C_4^2$ 个样本点, 它们是等可能的, 即 $n(\Omega_1) =$

$$C_5^2 C_4^2 = 60,$$

记取出的 4 个球中恰有 1 个红球的事件为 A , 则 $n(A) = C_3^1 C_3^1 C_2^1 C_2^2 + C_2^2 C_2^1 C_2^1 = 10$,

$$\text{所以 } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega_1)} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}.$$

(2) 从甲盒内任取 2 个球的试验的样本空间 Ω_2 含有的样本点个数为 $n(\Omega_2) = C_5^2 = 10$,

记至少取出一个红球的事件为 B , 两球颜色相同的事件为 C ,

$$\text{则 } n(B) = C_5^2 - C_2^2 = 9, n(BC) = C_3^2 = 3,$$

$$\text{因此 } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega_2)} = \frac{9}{10}, P(BC) = \frac{n(BC)}{n(\Omega_2)} = \frac{3}{10},$$

$$\text{所以在至少取出一个红球的前提下, 两球颜色相同的概率 } P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{1}{3}.$$

归纳总结 求解条件概率的两种方法

(1) 直接利用条件概率公式 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 计算.

(2) 样本空间法: 利用公式 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)}$ 计算.

6. AD 【解析】对于 A, 由 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, 得 $\frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$, 即 $P(AB) = P(B)P(A)$, 则事件 A 与事件 B 相互独立, A 正确;

对于 B, 由选项 A 知, 事件 $A, \bar{B}$ 相互独立, 则 $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = \frac{1}{2} \times$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}, \text{B 错误};$$

对于 C, $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) = \frac{1}{2}$, C 错误;

对于 D, $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$, D 正确.

故选 AD.

归纳总结 判断两个事件是否独立的方法

(1) 直接法: 由事件本身的性质直接判断两个事件发生是否相互影响.

(2) 定义法: 当 $P(AB) = P(A)P(B)$ 时, 事件 A, B 相互独立.

7. BC 【解析】对于 A: 因为 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, 当 A 与 B 独立时, $P(AB) = P(A)P(B)$, 此时 $P(A|B) = P(A)$, 由于无法确定 $P(A), P(B)$ 的大小关系, 故无法确定 $P(A|B)$ 与 $P(B)$ 的大小关系, 故 A 错误.

对于 B: 因为 $P(B|A) + P(\bar{B}) = 1$, 所以 $\frac{P(AB)}{P(A)} + 1 - P(B) = 1$, 所以 $\frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$, 即 $P(AB) = P(A)P(B)$, 所以 A 与 B 独立, 故 B 正确.

对于 C: 若 A 与 B 独立, 则 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$, 又 $P(\bar{A}) = 0.4$, 所以 $1 - P(A) = 0.4$, 则 $P(A) = 0.6$, 即 $P(A|B) = 0.6$, 故 C 正确.

对于 D: 因为 A 与 B 独立, 且 $P(AB) = \frac{4}{9}, P(B) = \frac{5}{9}$, 所以 $P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{4}{5}$, 由 A 知当 A 与 B 独立时, $P(A|B) = P(A)$, 所以 $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - P(A) = \frac{1}{5}$, 故 D 错误. 故选 BC.

8. 【解】(1) $P(A) = \frac{C_3^1}{C_{10}^1} = \frac{3}{10}$,

$$P(B) = \frac{3}{10} \times \frac{C_2^1}{C_9^1} + \frac{7}{10} \times \frac{C_3^1}{C_9^1} = \frac{3}{10},$$

$$P(AB) = \frac{3}{10} \times \frac{C_1^1}{C_9^1} = \frac{1}{15},$$

$$\text{则 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{15} \times \frac{10}{3} = \frac{2}{9}.$$

(2) 事件 A 与 B 不相互独立, 理由如下: $\because P(AB) = \frac{1}{15} \neq P(A)P(B)$, $\therefore$ 事件 A 与 B 不相互独立.

9. B 【解析】由题知 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 由 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, 变形可得 $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$, 所以 $P(AB) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$.

由 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, 变形可得

$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)},$$

$$\text{所以 } P(B) = \frac{1}{\frac{6}{3} \times \frac{4}{3}} = \frac{2}{9}.$$

10. B 【解析】设第1次取到白球为事件 A , 第2次取到白球为事件 B , 则 $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{7}$, 所以 $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$. 故选 B.

11. D 【解析】设“种子发芽”为事件 A , “种子能成长为幼苗”为事件 B , 则 $B \subseteq A$. 由题意知 $P(A) = 0.9$, $P(B) = P(AB) = 0.81$, 且 $P(B|A) = p$, 所以 $P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.9p = 0.81$, 解得 $p = 0.9$. 故选 D.

12. 【解】 设事件 A 表示“取出的产品是一等品”, 事件 B 表示“取出的产品是合格品”, 则 $P(A|B) = 45\%$, $P(\bar{B}) = 4\%$, 于是 $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 96\%$, 所以 $P(A) = P(AB) = P(B)P(A|B) = 96\% \times 45\% = 43.2\%$.

13. A 【解析】设事件 A 为“该专业棋手获得奖金”, 事件 B 为“该专业棋手只获得一局比赛的胜利”, 该专业棋手获得奖金包括: 战胜机器人 M , 没战胜机器人 N , 概率为 $\frac{3}{5} \times (1 - \frac{3}{5}) = \frac{6}{25}$; 战胜机器人 N , 没战胜机器人 M , 概率为 $(1 - \frac{3}{5}) \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$; 同时战胜机器人 M 和机器人 N , 概率为 $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$, 所以 $P(A) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} + \frac{9}{25} = \frac{21}{25}$. 又因为 $P(AB) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$, 所以根据条件概率公式得 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{12}{25}}{\frac{21}{25}} = \frac{4}{7}$. 故选 A.

14. BD 【解析】对于 A, 甲可以同时选打球和唱歌, 所以 $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, 故 A_1 与 A_2 不互斥, 故 A 错误. 对于 B, 先从4个项目中选择2个作为1个整体, 有 C_4^2 种选法, 再将这2个项目与另外2个项目分给甲、乙、丙3名学生, 有 A_3^3 种排法, 根据分步乘法计数原理可得总的排法种数为 $C_4^2 A_3^3 = 36$, 甲只选唱歌, 此时将剩下的3个项目

分给乙、丙, 有 $C_3^2 A_2^2 = 6$ (种) 排法; 甲选唱歌和另外一个项目有 $C_3^1 = 3$ (种) 选法, 此时将剩下的2个项目分给乙、丙, 共有 $C_2^1 A_2^2 = 6$ (种) 排法, 故 $P(A_2) = \frac{6+6}{36} = \frac{1}{3}$, 故 B 正确.

对于 C, 乙只选跳舞, 此时将剩下的3个项目分给甲、丙, 有 $C_3^2 A_2^2 = 6$ (种) 排法; 乙选跳舞和另外一个项目有 $C_3^1 = 3$ (种) 选法, 此时将剩下的2个项目分给甲、丙, 有 $C_2^1 A_2^2 = 6$ (种) 排法, 故 $P(A_3) = \frac{6+6}{36} = \frac{1}{3}$.

若甲选唱歌且乙选跳舞, 则剩下的2个项目, 丙可以都选, 也可以只选1个, 此时有 $C_2^2 C_1^1 + 1 = 5$ (种) 排法, 所以 $P(A_2 A_3) = \frac{5}{36}$,

所以 $P(A_3)P(A_2) = \frac{1}{9} \neq P(A_2 A_3) = \frac{5}{36}$, 故 A_2 与 A_3 不相互独立, 故 C 错误.

对于 D, $P(A_3|A_2) = \frac{P(A_3 A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{12}$, 故 D 正确. 故选 BD.

刷易错

★易错点 混淆“条件概率”与“交事件的概率”

15. $\frac{4}{15}$ 【解析】记“第一次取到白球”为事件 A , “第二次取到黄球”为事件 B , “第二次才取到黄球”为事件 C , 所以 $P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$.

易错警示 (1) 解答这类题易混淆 $P(AB)$ 与 $P(B|A)$ 的含义, 而误认为 $P(C) = P(B|A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. (2) $P(AB)$ 表示 A 与 B 同时发生的概率; 而 $P(B|A)$ 表示在事件 A 已经发生的条件下事件 B 发生的概率.

7.1.2 全概率公式

刷基础

1. D 【解析】设事件 A 为抽到主力球员, 则 $P(A) = \frac{11}{17}$, 命中率 $P_1(A) = 0.6$, 事件 B 为抽到替补球员, 则 $P(B) = \frac{6}{17}$, 命中率 $P_1(B) = 0.4$,

由全概率公式得从该球队球员中随机抽取1名球员进行定点射门, 其命中的概率为 $P = P(A) \cdot P_1(A) + P(B) \cdot P_1(B) = \frac{11}{17} \times 0.6 + \frac{6}{17} \times 0.4 = \frac{9}{17}$. 故选 D.

2. D 【解析】设事件 A 为“机器人能站稳”, 事件 B_1, B_2, B_3 分别为“平稳落地”“踉跄落地”“近乎倒地”三种落地情况, 则 $P(B_1) = 0.8$, $P(A|B_1) = 1$, $P(B_2) = 0.1$, $P(A|B_2) = 0.9$, $P(B_3) = 0.1$, $P(A|B_3) = 0.5$, 所以 $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = 0.8 \times 1 + 0.1 \times 0.9 + 0.1 \times 0.5 = 0.8 + 0.09 + 0.05 = 0.94$, 即这个机器人执行后空翻任务时能站稳的概率为 0.94. 故选 D.

名师点拨

某一事件 B 的发生可能有各种原因, 如果 B 是由原因 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 引起的, 那么事件 B 发生的概率是 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$, 每一个原因都可能导致 B 发生, 故 B 发生的概率是各原因引起 B 发生的概率的总和, 即全概率公式. 由此可以形象地把全概率公式看成“由原因推结果”, 每个原因对结果的发生有一定的“作用”, 即结果发生的可能性与各种原因的“作用”大小有关.

3. 【解】 设事件 M : 此产品为正品, 事件 D_1, D_2, D_3 分别代表产品由甲、乙、丙三个厂供应, 那么 $P(M) = P(D_1)P(M|D_1) + P(D_2)P(M|D_2) + P(D_3)P(M|D_3) = 0.2 \times 0.95 + 0.3 \times 0.90 + 0.5 \times 0.80 = 0.86$.

4. B 【解析】设抽取的一名学生来自数学组、信息组、物理组为事件 A_1, A_2, A_3 , 该学生进入决赛为事件 B , 则 $P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) = \frac{4}{9} \times 0.75 + \frac{2}{9} \times 0.5 + \frac{3}{9} \times 0.75 = \frac{25}{36}$,

则 $P(A_1|B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{9} \times 0.75}{\frac{25}{36}} = \frac{12}{25}$. 故选 B.

5. 【解】 (1) 记事件 A 表示炎热干燥天气条件下该保护区某天发生火灾, 事件 B 表示系统发出警报, 则 $P(A) = 0.04$, 所以 $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.04 = 0.96$, $P(B|A) = 0.95$, $P(B|\bar{A}) = 0.02$,

由全概率公式,得 $P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.04 \times 0.95 + 0.96 \times 0.02 = 0.0572$,

即炎热干燥天气条件下该保护区智能监控系统某天发出警报的概率为 0.0572.

(2) 由(1)知 $P(B) = 0.0572$, $P(A) = 0.04$, $P(B|A) = 0.95$,

所以炎热干燥天气条件下智能监控系统某天发出警报,保护区该天实际发生火灾的概率为 $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0.04 \times 0.95}{0.0572} \approx 0.66$.

链接教材 本题是教材第 51 页例 6 的变式,主要考查利用全概率公式和贝叶斯公式求概率.

使用全概率公式和贝叶斯公式解题的步骤

(1) 根据题意设出相应的事件,并将题目中已知和要求的概率表示出来;
(2) 对照已知和所求选择相应的公式,代入数值求解.

6. ACD 【解析】记事件 A 表示“水稻种子是变异种”,事件 B 表示“水稻种子是长不大的”.

$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = 5\% \times 90\% + (1 - 5\%) \times (1 - 90\%) = 14\% > 10\%$,故 **A 正确**;

$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = 5\% \times 90\% = 4.5\% > 1\%$,故 **B 错误**;

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{4.5\%}{14\%} \approx 32\% > 30\%$,故 **C 正确**;

种子能长大的概率 $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 14\% = 86\%$,则 $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} =$

$\frac{P(A) \cdot P(\bar{B}|A)}{P(\bar{B})} = \frac{5\% \times (1 - 90\%)}{86\%} \approx$

$0.6\% > 0.3\%$,故 **D 正确**. 故选 ACD.

7. 0.45 $\frac{2}{9}$ 【解析】记事件 A 表示首次选“驿站取件”,则 $P(A) = 0.5$,事件 $\bar{A}$ 表示首次选“上门配送”,则 $P(\bar{A}) = 0.5$,

事件 B 表示第二次选“驿站取件”,则 $P(B|A) = 0.7$, $P(B|\bar{A}) = 0.2$,

根据全概率公式可得 $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = 0.5 \times 0.7 + 0.5 \times 0.2 = 0.45$,

根据贝叶斯公式可得

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}{P(B)} = \frac{0.5 \times 0.2}{0.45} = \frac{2}{9}.$$

8. 【解】(1) 记事件 A 表示“球取自甲箱”,事件 $\bar{A}$ 表示“球取自乙箱”,事件 B 表示“取得黑球”,

则 $P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B|\bar{A}) = \frac{2}{5}$.

由全概率公式得 $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{11}{30}$.

(2) 该球取自乙箱的可能性更大,理由如下:

该球取自甲箱的概率 $P(A|B) =$

$$\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{11}{30}} = \frac{5}{11},$$

该球取自乙箱的概率 $P(\bar{A}|B) =$

$$\frac{P(\bar{A})P(B|\bar{A})}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{11}{30}} = \frac{6}{11}.$$

因为 $P(A|B) < P(\bar{A}|B)$,所以该球取自乙箱的可能性更大.

名师点拨 对全概率公式与贝叶斯公式的理解

简单来说,如果导致一个事件发生的原因有很多种而且各种原因是互斥的,那么这个事件发生的概率就是每种原因引起该事件发生的概率的总和,而求出这个概率,就是全概率公式要解决的问题.

而如果一个事件已经发生了,有很多原因都能导致这个事件发生,那么其中的一种原因导致该事件发生的概率是多少,则是贝叶斯公式要解决的问题.即全概率公式是“由因推果”,贝叶斯公式是“执果索因”.

刷易错

★易错点 不能正确选择全概率公式与贝叶斯公式而致错

9. AC 【解析】设 A_1 : 第一天去甲游乐场, A_2 : 第二天去甲游乐场, B_1 : 第一天去乙游乐场, B_2 : 第二天去乙游乐场,依题意可得 $P(A_1) = 0.3$, $P(B_1) = 0.7$, $P(A_2|A_1) = 0.7$, $P(A_2|B_1) = 0.6$. 对于 A, $P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(B_1)P(A_2|B_1) = 0.3 \times 0.7 + 0.7 \times 0.6 =$

0.63, **A 正确**;

对于 B, $P(B_2) = 1 - P(A_2) = 0.37$, **B 错误**;

对于 C, $P(B_1|A_2) = \frac{P(B_1)P(A_2|B_1)}{P(A_2)} = \frac{0.7 \times 0.6}{0.63} = \frac{2}{3}$, **C 正确**;

对于 D, $P(A_1|B_2) = \frac{P(A_1)P(B_2|A_1)}{P(B_2)} = \frac{P(A_1)[1 - P(A_2|A_1)]}{0.37} = \frac{0.3 \times (1 - 0.7)}{0.37} = \frac{9}{37}$, **D 错误**. 故选 AC.

10. 【解】(1) 设事件 A_1 表示“抽到隐藏款”, A_2 表示“抽到稀有款”, A_3 表示“抽到普通款”,

事件 B 表示“消费者给出好评”, 事件 $\bar{B}$ 表示“消费者未给出好评”.

根据题意 A_1, A_2, A_3 两两互斥, 且 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$

由题意得 $P(A_1) = \frac{1}{6}$, $P(A_2) = \frac{1}{3}$,

$P(A_3) = \frac{1}{2}$, $P(B|A_1) = \frac{4}{5}$,

$P(B|A_2) = \frac{1}{2}$, $P(B|A_3) = \frac{1}{5}$.

由全概率公式,得 $P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$,

所以消费者给出好评的概率为 $\frac{2}{5}$.

(2) 由(1)知 $P(B) = \frac{2}{5}$,

因此 $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

根据题意,得 $P(\bar{B}|A_3) = 1 - P(B|A_3) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

由贝叶斯公式,得 $P(A_3|\bar{B}) = \frac{P(A_3)P(\bar{B}|A_3)}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$,

所以,若消费者未给出好评,则其抽到普通款的概率为 $\frac{2}{3}$.

易错警示 若随机试验可分两个阶段进行,且第一阶段的各试验具体结果未知,那么:(1)如果要求的是第二阶段某一个结果发生的概率,那么用全概率公式;(2)如果第二个阶段的某一个结果是已知的,要求的是此结果为第一阶段某一个结果所引起的概率,一般用贝叶斯公式.

刷能力

1. C 【解析】因为 $P(B) = \frac{1}{2}$,

$$P(A|B) = \frac{1}{6}, P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \text{ 所以}$$

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = \frac{1}{12}. \text{ 又}$$

$$P(A) = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } P(A+B) = P(A) +$$

$$P(B) - P(AB) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{3}{4}. \text{ 故}$$

→ 陷阱: 注意减去重合部分的概率

选 C.

2. A 【解析】每人有 3 种学科选择, 所以试验的样本空间 Ω 包含 $3 \times 3 \times 3 = 27$ (个) 样本点.

事件 A, 甲有 3 种学科选择, 乙有 2 种学科选择, 丙无限制, 有 3 种学科选择,

所以事件 A 包含的样本点个数为 $3 \times 2 \times 3 = 18$, 则 $P(A) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$.

事件 AB: 甲、乙两人所报学科不同, 乙、丙两人所报学科相同, 甲有 3 种学科选择, 乙有 2 种学科选择, 丙与乙相同, 只有 1 种学科选择,

所以事件 AB 包含的样本点个数为 $3 \times 2 \times 1 = 6$, 则 $P(AB) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$,

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{3}.$$

故选 A.

3. C 【解析】根据题意, 设事件 A_0 为“发送信号 0”, 事件 A_1 为“发送信号 1”, 事件 B_0 为“接收信号为 0”, 事件 B_1 为“接收信号为 1”,

$$\text{则 } P(B_0|A_0) = 0.7, P(B_1|A_0) = 0.3, P(B_0|A_1) = 0.2, P(B_1|A_1) = 0.8.$$

设发送信号为 1 的概率为 x ,

$$\text{则 } P(B_1) = P(A_0)P(B_1|A_0) + P(A_1)P(B_1|A_1) = (1-x) \cdot 0.3 + 0.8x = 0.65.$$

解得 $x = 0.7$. 故选 C.

4. ABC 【解析】依题意可得 $P(A_1) = \frac{3}{5}, P(A_2) = \frac{2}{5}, P(B|A_1) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10},$

$$P(B|A_2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}, \text{ 所以 } P(B) =$$

$$P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{11}{50}, \text{ 所以 } P(A_2|B) =$$

$$\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{10}}{\frac{11}{50}} = \frac{2}{11}, \text{ 故 A,}$$

B, C 正确, D 错误, 故选 ABC.

5. BC 【解析】根据题意, 设用户使用信用卡支付为事件 A, 用户使用支付宝支付为事件 B, 用户使用微信支付为事件 C, 用户出现支付问题为事件 E, 则 $P(A) = 0.1, P(B) = 0.45, P(C) = 0.45, P(E) = 0.0675$, 且 $P(A|E) = P(B|E) = P(C|E) = \frac{1}{3}$.

$$\text{对于 A, 由 } P(A|E) = \frac{P(AE)}{P(E)} =$$

$$\frac{P(A)P(E|A)}{P(E)} = \frac{0.1 \times P(E|A)}{0.0675} = \frac{1}{3},$$

解得 $P(E|A) = 0.225$, 故用户使用信用卡支付遇到支付问题的概率为 22.5%, 所以 A 错误;

$$\text{对于 B, 由 } P(B|E) = \frac{P(BE)}{P(E)} =$$

$$\frac{P(B)P(E|B)}{P(E)} = \frac{0.45 \times P(E|B)}{0.0675} = \frac{1}{3},$$

解得 $P(E|B) = 0.05$, 同理可得 $P(E|C) = 0.05$, 所以 $P(E|B) = P(E|C)$, 即使用支付宝支付遇到支付问题与使用微信支付遇到支付问题的概率相同, 所以 B 正确;

对于 C, 若将信用卡支付通道关闭, 则 $P(E) = P(B)P(E|B) + P(C)P(E|C) = P(B)P(E|B) + [1 - P(B)]P(E|C)$, 又由 B 项可得 $P(E|B) = P(E|C) = 0.05$, 则 $P(E) = 0.05$, 即出现支付问题的概率降到 0.05, 所以 C 正确;

对于 D, 减少微信支付的人数, 即 $P(C)$ 减小,

$$\text{则 } P(E) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) + P(C)P(E|C) = 0.225P(A) + 0.05P(B) + 0.05P(C), \text{ 若 } P(C) \text{ 减小, 则 } P(E) \text{ 不变}$$

→ 陷阱: 由 $P(A) + P(B) + P(C) = 1$, 若 $P(C)$ 减小的加到 $P(B)$ 中, $P(E)$ 不变; 若 $P(C)$ 减小的加到 $P(A)$ 中, $P(E)$ 增大; 若 $P(C)$ 减小的加到 $P(A)$ 和 $P(B)$ 中, $P(E)$ 增大

或增大, 所以 D 错误. 故选 BC.

6. $\frac{1}{3} \frac{5}{12}$ 【解析】由题意得 $P(A_1) =$

$$\frac{5}{C_6^2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, P(\overline{A_1}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

在 A_1 发生的前提下, 另一个奖品在 2, 3, 4, 5, 6 中,

若在 6 中, 则 $P(B_6|A_1) = 0$;

$$\text{若不在 6 中, 则 } P(B_6|A_1) = \frac{4}{5} \times$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5},$$

$$\text{则 } P(A_1B_6) = P(A_1)P(B_6|A_1) = \frac{1}{3} \times$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

在 $\overline{A_1}$ 发生的前提下, 两个奖品在 2, 3,

$$4, 5, 6 \text{ 中}, P(B_6|\overline{A_1}) = \frac{C_4^2}{C_5^2} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{10} \times$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{5},$$

$$\text{则 } P(\overline{A_1}B_6) = P(\overline{A_1})P(B_6|\overline{A_1}) = \frac{2}{3} \times$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

$$\text{所以 } P(B_6) = P(A_1B_6) + P(\overline{A_1}B_6) =$$

$$\frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{1}{5}.$$

→ 陷阱: 主持人打开 6 号箱子的原因分 1 号箱有奖品和没奖品两种情况, 用全概率公式去计算

$$\text{所以 } P(A_1|B_6) = \frac{P(A_1B_6)}{P(B_6)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{由题意得 } P(A_2) = \frac{5}{C_6^2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, P(B_6|$$

$$A_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times 0 = \frac{1}{4}, \text{ 则}$$

$$P(A_2|B_6) = \frac{P(B_6|A_2)P(A_2)}{P(B_6)} =$$

$$\frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{12}.$$

7. 【解】(1) 设事件 B 表示最终通过考核, 事件 A_1, A_2, A_3, A_4 分别表示通过第一、二、三、四项考核.

因为各项考核是相互独立的, 所以该部门招工的通过率为 $P(B) = 0.6 \times 0.8 \times 0.9 \times 0.65 = 0.2808$,

因此该部门招工的淘汰率为 $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.2808 = 0.7192$.

(2) 在通过第一、三项考核的情况下考核全部通过的概率为 $P(B|A_1A_3) =$

$$\frac{P(B)}{P(A_1A_3)} = \frac{0.2808}{0.6 \times 0.9} = 0.52,$$

因此通过第一、三项考核但是仍被淘汰的概率为 $P(\overline{B}|A_1A_3) = 1 - P(B|A_1A_3) = 1 - 0.52 = 0.48$.

→ 陷阱: 通过第一、三项考核但被淘汰, 即第二项或第四项考核未通过, 情况较多, 可以从对立事件入手

8. 【解】(1) A 夺冠即为 3 轮比赛都获胜,

$$\text{所以 A 夺冠的概率为 } \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

由题意知, B, C, D, E, F, G, H 七名运动员水平相同, 且八名运动员各自夺冠的概率之和为 1,

所以 B, C, D, E, F, G, H 七名运动员各自夺冠的概率均为 $\frac{1}{7} \times \left(1 - \frac{8}{27}\right) = \frac{19}{189}$.

(2) 记事件 $B = "B \text{ 获得冠军}"$, 事件 $A = "B \text{ 与 } A \text{ 对决过}"$, 事件 $A_i = "B \text{ 与 } A \text{ 在第 } i \text{ 轮对决}"$, $i = 1, 2, 3$.

不妨设 A 在①号位, 则 B 在第 1, 2, 3 轮能与 A 对决时其位置编号分别为②, ③④, ⑤⑥⑦⑧.

$$P(AB) = P((A_1 + A_2 + A_3)B) = P(A_1B) + P(A_2B) + P(A_3B),$$

$$P(A_1B) = \frac{1}{7} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{84},$$

$$P(A_2B) = \frac{2}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{63}, P(A_3B) = \frac{4}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times$$

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{189},$$

$$\text{所以 } P(AB) = \frac{1}{84} + \frac{1}{63} + \frac{4}{189} = \frac{37}{756}.$$

(3) 记事件 $C = "B \text{ 与 } C \text{ 对决过}"$.

B 没有与 A 对决过且最后获得冠军的概率 $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{19}{189} -$

$$\frac{37}{756} = \frac{39}{756}.$$

$$P(BC) = P((A + \bar{A})BC) = P(ABC) + P(\bar{A}BC) = P(AB)P(C|AB) + P(\bar{A}B) \cdot$$

$$P(C|\bar{A}B).$$

由题意知, C, D, E, F, G, H 六名运动员与 B 对决过的概率相同, B 夺冠时共与三名运动员对决,

$$\text{所以 } P(C|AB) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(C|\bar{A}B) =$$

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \text{ 代入得 } P(BC) = \frac{37}{756} \times \frac{1}{3} +$$

$$\frac{39}{756} \times \frac{1}{2} = \frac{191}{4536}.$$

9. 【解】(1) 由全概率公式得 $P_2 = P_1 \times 0.8 + (1 - P_1) \times 0.3 = 0.2 \times 0.8 + (1 - 0.2) \times 0.3 = 0.16 + 0.24 = 0.4$.

(2) 由题意知 $P_n = 0.8P_{n-1} + 0.3(1 - P_{n-1}) (n \geq 2)$, 即 $P_n = 0.5P_{n-1} + 0.3 (n \geq 2)$,

$$\text{则 } P_n - 0.6 = 0.5(P_{n-1} - 0.6) (n \geq 2).$$

因为 $P_1 - 0.6 = -0.4$, 所以数列 $\{P_n - 0.6\}$ 是以 -0.4 为首项, 0.5 为公比的等比数列,

$$\text{所以 } P_n - 0.6 = -0.4 \times 0.5^{n-1}, \text{ 即 } P_n = 0.6 - 0.4 \times 0.5^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*).$$

(3) 由(2)可知 $P_n = 0.6 - 0.4 \times 0.5^{n-1}$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $|P_n - P_{n-1}| = |(0.6 - 0.4 \times 0.5^{n-1}) - (0.6 - 0.4 \times 0.5^{n-2})| = 0.2 \times 0.5^{n-2}$,

若 $|P_n - P_{n-1}| < 0.01 (n \geq 2)$, 则 $0.2 \times$

$$0.5^{n-2} < 0.01, \text{ 即 } 0.5^{n-2} < 0.05.$$

$$\because 0.5^{6-2} = 0.0625 > 0.05, 0.5^{7-2} = 0.03125 < 0.05,$$

$$\therefore \text{ 当 } n \geq 7 \text{ 时, } |P_n - P_{n-1}| < 0.01.$$

实际意义为从第 7 天起, 相邻两天的学习状态为“认真”的概率的变化幅度已非常小(小于 0.01), 表明其学习习惯已基本趋于稳定.

刷素养

10. $\frac{17}{81}$ 【解析】比赛 3 局甲赢得胜利的

→ 点拨: 谁先胜 3 局谁赢得胜利, 则最少要比赛 3 局, 最多比赛 5 局才能分出胜负, 故只需讨论甲比赛 3 局、4 局、5 局赢得胜利的情况

$$\text{概率 } p_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27};$$

比赛 4 局甲赢得胜利的概率

$$p_2 = C_3^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27};$$

→ 点拨: 前 3 局中有 1 局甲输, 2 局甲赢, 第 4 局甲赢

比赛 5 局甲赢得胜利的概率

$$p_3 = C_4^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{81},$$

→ 点拨: 前 4 局中有 2 局甲输, 2 局甲赢, 第 5 局甲赢

所以甲赢得胜利的概率为 $p_1 + p_2 +$

$$p_3 = \frac{3+6+8}{81} = \frac{17}{81}.$$

7.2 离散型随机变量及其分布列

刷基础

1. B 【解析】选项 A 的取值是一个固定的数字, 不具有随机性, 故 A 错误; 选项 B 取到红球的个数是一个随机变量, 它的可能取值是 0, 1, 2, 故 B 正确; 选项 C 是一个事件而非随机变量, 故 C 错误; 选项 D 中, 一个事件的概率值是一个定值而非随机变量, 故 D 错误. 故选 B.

名师点拨 判断一个变量是不是随机变量需注意两点: 一看是否为数值, 二看是否具有随机性.

2. ABC 【解析】在一个随机试验中, 随机变量的结果有多种可能, 选项 ABC 都符合随机变量的特点, 故 A, B, C 正确; 方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的实根个数是 2, 且是确定的, 不是随机变量, 故 D 错误. 故选 ABC.

3. BD 【解析】对于 A, 车载大灯的使用寿命 X_1 不能一一列举, 故不是离散型随机变量, A 错误; 对于 B, 从 1 至 4 这 4 个数字中随机抽

取一个数字, 记抽出数字 1 的次数为 X_2 , 能一一列举, 是离散型随机变量, B 正确;

对于 C, 某次物理实验测量所得的实验误差 X_3 不能一一列举, 不是离散型随机变量, C 错误;

对于 D, 某培养皿上的细菌个数 X_4 能一一列举, 是离散型随机变量, D 正确. 故选 BD.

特别注意 这类问题主要考查离散型随机变量的概念, 解答时要明确其满足的四个特征:

- (1) 离散型随机变量可以用实数来表示;
- (2) 试验之前可以判断其可能出现的所有值;
- (3) 在试验之前不能确定取值;
- (4) 试验结果能一一列出.

4. ABC 【解析】某机场明年 5 月 1 日运送乘客的数量可能为 0, 1, 2, 3, ..., 是随机变化的, 而且可以一一列出, 是离散型随机变量, 故 A 正确; 某办公室一

天中接到电话的次数可能为 0, 1, 2, 3, ..., 是随机变化的, 而且可以一一列出, 是离散型随机变量, 故 B 正确; 某地警方明年 5 月 1 日到 10 月 1 日期间查处酒驾司机的人数可能为 0, 1, 2, 3, ..., 是随机变化的, 而且可以一一列出, 是离散型随机变量, 故 C 正确; 果汁的容量在 498 mL ~ 502 mL 之间波动, 虽然是随机变量, 但无法一一列出, 所以不是离散型随机变量, 故 D 错误. 故选 ABC.

5. C 【解析】事件 $X = 4$ 表示尝试次数为 4. 根据规则, 进行第 4 次尝试的充要条件是前 3 次尝试均错误, 故事件 $X = 4$ 与“前 3 次尝试均错误”等价, 第 4 次尝试正确与否, X 均为 4. 故选 C.

特别注意 用随机变量表示随机试验的结果的关键点

解决此类问题的关键是明确随机变量的所有可能取值, 以及取每一个值对应的意义, 即一个随机变量的取值对应一个或多个随机试验的结果.

- 6. 【解】** (1) 随机变量 X 的可能取值为 0, 1, 2, $\dots$. $\{X=i\}$ ($i=0, 1, 2, \dots$) 表示某市医院明天接到 i 次 120 急救电话.
 (2) 随机变量 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3.
 $\{X=0\}$ 表示“取出 0 个白球和 3 个黑球”; $\{X=1\}$ 表示“取出 1 个白球和 2 个黑球”; $\{X=2\}$ 表示“取出 2 个白球和 1 个黑球”; $\{X=3\}$ 表示“取出 3 个白球和 0 个黑球”.

7. ACD 【解析】 由分布列的性质可得

$$a = 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{10} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}, \text{A 正确};$$

$$P(X > 4) = P(X = 6) + P(X = 8) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}, \text{B 错误};$$

$$P(2 < X < 8) = P(X = 6) + P(X = 4) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}, \text{C 正确};$$

$$\frac{1}{5} = \frac{3}{10}, \text{C 正确};$$

$$P(X < 7) = 1 - P(X = 8) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}, \text{D}$$

巧思: $P(X < 7) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = \frac{3}{5}$

正确. 故选 ACD.

链接教材 此题是教材第 59 页例 2 的变式. 分布列具有两个性质:

(1) $p_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$);

(2) $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

这两个性质中, 一方面可以利用概率和为 1 列方程求出分布列中某些参数, 另一方面可以用来检验分布列是否正确, 但要注意概率之和为 1 是分布列正确的必要不充分条件.

8. A 【解析】 $P(X = k) = \frac{m}{k(k+1)} =$

$$m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right),$$

$$\text{因为 } P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1,$$

$$\text{所以 } m \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + m \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) +$$

$$m \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + m \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = 1, \text{解得}$$

$$m = \frac{5}{4},$$

$$\text{所以 } P(X=k) = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right),$$

$$\text{所以 } P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) =$$

$$\frac{5}{4} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{4} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{6}.$$

故选 A.

规律方法 求本题的关键是利用离散型随机变量分布列的性质: 离散型随机变量的所有取值的概率和为 1.

(1) 利用离散型随机变量的分布列的性质可以求出与概率有关的参数的取值范围, 还可以检验所求分布列是否正确. (2) 因为离散型随机变量的各个可能值表示的事件是彼此互斥的, 所以离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和.

9. D 【解析】 由分布列性质可得 $0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.3 + m = 1$, 解得 $m = 0.3$. 因为 $Y = |X - 2|$, 所以 $P(Y = 2) = P(X = 0) + P(X = 4) = 0.2 + m = 0.2 + 0.3 = 0.5$. 故选 D.

10. 【解】 (1) 设甲同学 2 门课程均未取得优秀成绩为事件 A,

$$\text{则事件 A 的概率 } P(A) = \left(1 - \frac{2}{3} \right) \times$$

$$\left(1 - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

(2) 由题意得 X 的可能取值为 0, 1, 2,

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{2}{3} \right) \times \left(1 - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{3} \times$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{12}, P(X=1) = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3}{4} \right) +$$

$$\left(1 - \frac{2}{3} \right) \times \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{12},$$

$$P(X=2) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2},$$

故 X 的分布列如下所示:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$

规律方法 离散型随机变量分布列的计算方式

(1) 求出离散型随机变量的所有可能取值;

(2) 灵活运用古典概型、互斥事件的概率和公式、独立事件的乘法公式等, 计算不同取值的概率;

(3) 验证概率和是否为 1.

对于某一个直接计算过于复杂的离散型随机变量取值的概率, 可以先求出剩余取值对应的概率, 再利用概率和为 1 进行计算.

11. 【解】 (1) 依题意, 从这 10 件产品中任选 3 件的不同取法数为 C_{10}^3 , 3 件产品来自同一车间的取法数为 $C_5^3 + C_3^3$, 所以选出的 3 件产品来自同一车间的

$$\text{概率 } P = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}.$$

(2) 依题意, X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24},$$

$$P(X=1) = \frac{C_7^2 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40},$$

$$P(X=2) = \frac{C_7^1 C_3^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120},$$

微黑板: 计算完最后的取值概率后, 根据所有取值概率之和是否为 1 判断计算是否正确

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

12. A 【解析】 对于选项 A, 抛掷一枚骰子, 所得点数 X 的取值范围为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 所以 A 中的随机变量不服从两点分布; 对于选项 B, 射击手射击一次, 只有击中目标和不击中目标两种可能的结果, 所以 B 中的随机变量服从两点分布; 对于选项 C, 袋中只有红球和白球两种颜色的球, 所以取出的 1 个球只可能是红球或者白球, 所以 C 中的随机变量服从两点分布; 对于选项 D, 医生做一次手术, 该手术可能成功, 也可能失败, 所以 D 中的随机变量服从两点分布. 故选 A.

13. C 【解析】 服从两点分布的随机变量只有 0, 1 两个取值, 且随机变量的概率和为 1, 所以只有 C 选项中的 X 服从两点分布. 故选 C.

14. A 【解析】 $\because$ 随机变量 X 服从两点分布, $\therefore P(X=1) + P(X=0) = 5P(X=0) = 1, \therefore P(X=0) = \frac{1}{5}$. 故选 A.

15. 2 【解析】 由分布列的性质可得

$$\begin{cases} t^2 - \frac{7}{4}t + \frac{11}{4}t - 5 = 1, \\ 0 \leq t^2 - \frac{7}{4}t \leq 1, \\ 0 \leq \frac{11}{4}t - 5 \leq 1, \end{cases}$$

避坑: 注意不要忽视每个随机变量的概率不小于 0

$$\text{即 } \begin{cases} t^2 + t - 6 = 0, \\ 0 \leq t^2 - \frac{7}{4}t \leq 1, \end{cases} \text{解得 } t = 2.$$

刷易错

★易错点 求概率时对题意理解不清致误

16. A 【解析】∵从盒子中任取3个球来用,用完后装回盒中,此时盒中旧球个数 $X=4$,即旧球的个数增加了2,∴取出的3个球为1个旧球,2个新球,
 $\therefore P(X=4) = \frac{C_2^1 C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$. 故选 A.

易错警示 本题容易因对题意理解不清楚,无法正确分析出 $X=4$ 时对应的取球情况,而产生错误.

刷能力

1. B 【解析】抛掷一枚质地均匀的硬币两次,则抛掷硬币的次数为2,不是随机变量,A不满足题意;
 出现正面的次数是随机的,可作为随机变量,B满足题意;
 出现正面或反面的次数,标准不明确,不是随机变量,C不满足题意;
 出现正面和反面的次数之和为必然事件,试验前便知是必然出现的结果,不是随机变量,D不满足题意. 故选 B.

名师点拨 随机变量的特点,一是能用数值表示,二是能不能随机发生(可能发生也可能不发生).

2. B 【解析】因为取到白球时停止,所以最少取球次数为1,即第一次就取到了白球;
 最多取球次数为7,即把所有的黑球取完之后才取到白球.
 由题意可知,随机变量 X 的可能取值为1,2,3,4,5,6,7. 故选 B.

3. D 【解析】当 $k=5$ 时, $P(X \leq 5) = 1 = 5^2 P(X=5)$,解得 $P(X=5) = \frac{1}{25}$;
 当 $k=4$ 时, $P(X \leq 4) = 1 - P(X=5) = 4^2 P(X=4)$,解得 $P(X=4) = \frac{3}{50}$;
 当 $k=3$ 时, $P(X \leq 3) = 1 - P(X=4) - P(X=5) = 3^2 P(X=3)$,解得 $P(X=3) = \frac{1}{10}$;
 当 $k=2$ 时, $P(X \leq 2) = 1 - P(X=3) - P(X=4) - P(X=5) = 2^2 P(X=2)$,解得 $P(X=2) = \frac{1}{5}$;
 所以 $P(X=1) = 1 - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4) - P(X=5) = \frac{3}{5}$. 故选 D.

4. B 【解析】因为随机变量 X, Y 均服从两点分布,所以 $P(X=0) = 1 - P(X=1) = \frac{2}{3}$,
 $P(X=1, Y=1) = P(XY=1) =$

$$1 - P(XY=0) = \frac{1}{4},$$

点悟: X, Y 的取值均为0或1,则 XY 的取值只能为0,1,即事件 $XY=1$ 与事件 $XY=0$ 是对立事件

$$\text{因为 } P(Y=1) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1) = P(X=0, Y=1) + \frac{1}{4} = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } P(X=0, Y=1) = \frac{5}{12}, \text{ 由条件概率公式得 } P(Y=1|X=0) = \frac{P(X=0, Y=1)}{P(X=0)} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}, \text{ 故选 B.}$$

5. AC 【解析】由题知 $P(|X| \neq 1) = P(X=0) + P(X=2) = n + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$,得
 $n = \frac{5}{12}$,
 又 $m+n+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$,则 $m = \frac{3}{4} - n = \frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}$. 故选 AC.

6. $6+4\sqrt{2}$ 【解析】由题意及分布列的性质可得

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < b < 1, \\ a+b = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}, \end{cases}$$

$$\therefore a+b = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 2(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right) = 2 \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} + 2 \right) = 6 + \frac{2b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 6 + 2\sqrt{\frac{2b}{a} \times \frac{4a}{b}} = 6 + 4\sqrt{2},$$
 当且仅当 $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}, b = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 时取等号,
 $\therefore \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为 $6+4\sqrt{2}$.

7. $\frac{53}{108}$ 【解析】要让 $X=2$ 说明两次交换后甲袋中的黑球数量和初始相同,分两种情况讨论:
 ①两次交换都没有改变甲袋中的黑球数:
 第一次交换:甲袋中摸出白球、乙袋中摸出白球,交换后甲袋中黑球数不变(仍为2),概率为 $\frac{C_4^1}{C_6^1} \times \frac{C_6^1}{C_6^1} = \frac{2}{3}$;
 第二次交换:甲袋中摸出白球、乙袋中摸出白球,交换后甲袋中黑球数不变(仍为2),概率为 $\frac{C_4^1}{C_6^1} \times \frac{C_6^1}{C_6^1} = \frac{2}{3}$;
 则这种情况的概率为 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$;

②第一次交换让甲袋中黑球数减1,第二次交换让甲袋中黑球数加1(恢复为2),

第一次交换:甲袋中摸出黑球、乙袋中摸出白球,交换后甲袋中黑球数变为1,概率为 $\frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_6^1}{C_6^1} = \frac{1}{3}$;

第二次交换:甲袋中此时有5白1黑,乙袋中此时有5白1黑,要让甲袋中黑球数恢复为2,需要甲袋中摸出白球、乙袋中摸出黑球,概率为 $\frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_1^1}{C_6^1} = \frac{5}{36}$;

则这种情况的概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{5}{36} = \frac{5}{108}$,故
 $P(X=2) = \frac{4}{9} + \frac{5}{108} = \frac{53}{108}$.

8. 【解】(1)由题意得随机变量 X 的分布列如表所示:

X	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
P	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$

由分布列的性质得 $a+2a+3a+4a+5a=1$,解得 $a = \frac{1}{15}$.

(2)由题意可知, η 的所有可能取值为0,1,2,3,

$$P(\eta=0) = P\left(X = \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{15}, P(\eta=1) = P\left(X = \frac{1}{5}\right) + P\left(X = \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{15},$$

$$P(\eta=2) = P\left(X = \frac{4}{5}\right) = \frac{4}{15}, P(\eta=3) = P(X=1) = \frac{1}{3},$$

所以 η 的分布列为

η	0	1	2	3
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$

9. 【解】(1)设事件 A :甲面试合格,事件 B :乙面试合格,事件 C :甲、乙面试都合格,

由题知, A, B 相互独立, $C=AB$,

$$\text{因为 } P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{C_4^2}{C_5^2} = \frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } P(C) = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{50},$$

所以甲、乙面试都合格的概率为 $\frac{9}{50}$.

(2)由题知,随机变量 X 的所有可能取值为1,2,3,4,

避坑:容易忽略乙至少答对1道题

$$\text{则 } P(X=1) = \frac{C_2^2 C_4^1 C_1^1}{C_5^2 C_5^2} = \frac{1}{25},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^1 C_2^1 C_4^1 C_1^1 + C_2^2 C_4^2}{C_5^2 C_5^2} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^2 C_4^1 C_1^1 + C_3^1 C_2^2 C_4^2}{C_5^2 C_5^2} = \frac{12}{25},$$

$$P(X=4) = \frac{C_3^3 C_4^2}{C_5^2 C_5^2} = \frac{9}{50},$$

所以 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{50}$

10. 【解】 (1) 设甲同学做对试题 A 为事件 M , 甲同学做对试题 B 为事件 N , 由题设可知 $P(M) = P(MN) + P(\overline{M}\overline{N}) = 0.6, P(MN) = 0.3$,

所以 $P(\overline{M}\overline{N}) = 0.3$, 所以甲同学做对试题 A 没有做对试题 B 的概率为 0.3 .

(2) 由题设可知 $P(M) = 0.6, P(N) = 0.4, P(MN) = 0.3, P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 0.4$.

又 $P(N) = P(MN) + P(\overline{M}\overline{N}) = 0.4$, 所以 $P(\overline{M}\overline{N}) = 0.1$, 故 $P(N|\overline{M}) = \frac{P(\overline{M}\overline{N})}{P(\overline{M})} = \frac{1}{4}$.

(3) 根据题意甲做对 0 道题的概率为 $P(\overline{M}\overline{N}) = 1 - P(M\overline{N}) - P(\overline{M}N) - P(MN) = 0.3$.

甲做对 1 道题的概率为 $P(M\overline{N}) + P(\overline{M}N) = 0.3 + 0.1 = 0.4$.

由题知 $X=0, 1, 2, 3$,

则 $P(X=0) = 0.3 \times 0.5 = 0.15$,

$P(X=1) = 0.3 \times 0.5 + 0.4 \times 0.5 = 0.35$,

$P(X=2) = 0.4 \times 0.5 + 0.3 \times 0.5 = 0.35$,

$P(X=3) = 0.3 \times 0.5 = 0.15$,

可得 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.15	0.35	0.35	0.15

11. 【解】 (1) 设 A_i = “第 i ($i=1, 2, 3$) 个球甲发球成功”, B_i = “第 i ($i=1, 2, 3$) 个球乙发球成功”, C = “在前两个球发完后, 甲共得 1 分”,

则 $C = B_1\overline{B}_2 \cup \overline{B}_1A_2$, 且 B_1 与 $\overline{B}_2$ 相互独

点悟: 两次发球后甲得 1 分的情况有两种: 第一次乙发球成功、第二次乙发球失败和第一次乙发球失败、第二次甲发球成功

立, $\overline{B}_1$ 与 A_2 相互独立, $B_1\overline{B}_2$ 与 $\overline{B}_1A_2$ 互斥,

$$\text{所以 } P(C) = P(B_1\overline{B}_2 \cup \overline{B}_1A_2) =$$

$$P(B_1\overline{B}_2) + P(\overline{B}_1A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times$$

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{12}.$$

(2) X 的所有可能取值为 $-3, 0, 3, 6$,

则 $P(X = -3) = P(B_1B_2B_3) =$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

$$P(X=0) = P(B_1B_2\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1\overline{B}_2A_3) +$$

$$P(\overline{B}_1A_2B_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3} +$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24},$$

$$P(X=3) = P(B_1\overline{B}_2A_3) + P(\overline{B}_1A_2\overline{B}_3) +$$

$$P(\overline{B}_1A_2A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{36},$$

$$P(X=6) = P(\overline{B}_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

所以 X 的分布列为

X	-3	0	3	6
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{2}{9}$

7.3 离散型随机变量的数字特征

7.3.1 离散型随机变量的均值

刷基础

1. B 【解析】 由分布列的性质知 $\frac{1}{2} + m +$

$$\frac{1}{3} = 1, \text{ 所以 } m = \frac{1}{6},$$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} =$$

$$\frac{11}{6}. \text{ 故选 B.}$$

2. D 【解析】 依题意, X 的取值为 0, 1, 2,

$$\text{则 } P(X=0) = \frac{C_4^0 C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}, P(X=1) =$$

$$\frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^2} = \frac{4}{7}, P(X=2) = \frac{C_4^2 C_3^0}{C_7^2} = \frac{2}{7}.$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

$$\text{可得 } E(X) = 0 \times \frac{1}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{2}{7} =$$

$$\frac{8}{7}. \text{ 故选 D.}$$

3. D 【解析】 记事件 A, B, C 分别为甲、乙、丙能按时正确解答该题,

由题意得 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.6, P(C) = 0.4$,

则 $P(\overline{A}) = 0.5, P(\overline{B}) = 0.4, P(\overline{C}) = 0.6$.

由题意可知 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 0.5 \times 0.4 \times 0.6 = 0.12,$$

$$P(X=1) = P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(A\overline{B}\overline{C}) = 0.5 \times 0.4 \times 0.6 + 0.5 \times 0.6 \times 0.4 + 0.5 \times 0.4 \times 0.4 = 0.38,$$

$$P(X=2) = P(A\overline{B}C) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(A\overline{B}\overline{C}) = 0.5 \times 0.6 \times 0.6 + 0.5 \times 0.6 \times 0.4 + 0.5 \times 0.4 \times 0.6 = 0.38,$$

$$P(X=3) = P(ABC) = 0.5 \times 0.6 \times 0.4 = 0.12,$$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times 0.12 + 1 \times 0.38 + 2 \times 0.38 + 3 \times 0.12 = 1.5.$$

故选 D.

4. $\frac{39}{28}$ 【解析】 若三个年级分到的名额

数分别为 a, b, c , 则 $a+b+c=9$, 又每个

年级至少一个名额, 所以相当于 9 个相同的球分成 3 份, 且每份至少有一个球, 即用 2 个隔板

插入 8 个空, 共有 $C_8^2 = 28$ 种分法. 由题意 $X = \min\{a, b, c\}$, 则 $X=1, 2, 3$,

令从高一到高三各年级分配的名额数为 (a, b, c) ,

其中 $X=3$ 的情况只有 $(3, 3, 3)$ 一种, 即 $P(X=3) = \frac{1}{28}$.

$X=2$ 的情况有 $(2, 2, 5), (2, 5, 2), (5, 2, 2), (2, 3, 4), (2, 4, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 2), (4, 2, 3), (4, 3, 2)$, 共 9 种,

$$\text{即 } P(X=2) = \frac{9}{28},$$

$$\text{所以 } P(X=1) = 1 - \frac{1}{28} - \frac{9}{28} = \frac{18}{28}.$$

$$\text{综上, } E(X) = 3 \times \frac{1}{28} + 2 \times \frac{9}{28} + 1 \times$$

$$\frac{18}{28} = \frac{39}{28}.$$

5. 【解】(1) 设事件 A 为“选甲队”, 事件 B 为“选乙队”, 事件 C 为“选中男生”
 则 $P(C) = P(A)P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

(2) 从甲队中随机选取 2 名志愿者支援乙队, 则 X 的可能取值为 1, 3, 5,

【点悟: 从甲队中选出的志愿者可能为 2 女、1 女 1 男、2 男, 加入乙队后对应男女人数之差分别为 1, 3, 5

则 $P(X=1) = \frac{C_2^3}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$, $P(X=3) = \frac{C_3^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, $P(X=5) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$.

故 X 的分布列为

X	1	3	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

则 $E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{3}{5} + 5 \times \frac{1}{5} = 3$.

6. D 【解析】∵ 随机变量 X 服从两点分布, ∴ 令 $P(X=1) = p$, 则 $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p = 0.7$. 故选 D.

7. 0 【解析】因为随机变量 X 服从两点分布, 且 $P(X=1) = 0.6$, 所以 $P(X=0) = 1 - P(X=1) = 0.4$, $E(X) = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.6 = 0.6$.

又 $\xi = 5X - 3$, 所以 $E(\xi) = 5E(X) - 3 = 0$.

8. B 【解析】设每件产品的利润为 X , 则 X 的分布列为

X	50	-60
P	0.9	0.1

则 $E(X) = 50 \times 0.9 - 60 \times 0.1 = 39$.

设这批产品的利润为 Y , 则 $Y = 200X$, 故这批产品的利润的均值为 $E(Y) = 200E(X) = 200 \times 39 = 7800$ 元. 故选 B.

9. $\frac{1}{3}$ 7 【解析】由已知得 $m = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, $E(X) = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{6} \times 6 = 3$, 所以 $E(Y) = 2E(X) + 1 = 7$.

10. $\frac{5}{6}$ 1 【解析】由题意可得 $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{5}{6}$.
 由题意可知, 随机变量 X 的可能取值有 0, 1, 2, 则 $P(X=0) = \frac{C_2^2 C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}$,

$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{3}$, $P(X=2) = \frac{C_2^0 C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}$, 所以 $E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = 1$. 因为 $Y = 2 - X$, 故 $E(Y) = 2 - E(X) = 2 - 1 = 1$.

11. C 【解析】由题意, X 的取值可能为 1, 2, 3,
 则 $P(X=1) = p$, $P(X=2) = (1-p)p$, $P(X=3) = (1-p)^2 p + (1-p)^3 = (1-p)^2$,

【点悟: 第 3 次后无论成功失败都不能继续制作, 因此 $X=3$ 有两种情况

则 $E(X) = P(X=1) + 2P(X=2) + 3P(X=3) = p + 2(1-p)p + 3(1-p)^2 = p^2 - 3p + 3 > \frac{7}{4}$,

解得 $p > \frac{5}{2}$ 或 $p < \frac{1}{2}$. 又 $p \in (0, 1]$, 所以

以 $p \in (0, \frac{1}{2})$. 故选 C.

12. $\frac{16}{3}$ 【解析】因为一个篮球运动员投篮一次得 3 分的概率为 a , 得 2 分的概率为 b , 不得分的概率为 c , 且他投篮一次得分的数学期望为 2, 所以 $3a + 2b = 2$,

所以 $\frac{2}{a} + \frac{1}{3b} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{3b} \right) (3a + 2b) = \frac{1}{2} \left(\frac{4b}{a} + \frac{a}{b} + 6 + \frac{2}{3} \right) \geq \frac{1}{2} \left(2\sqrt{\frac{4b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 6 + \frac{2}{3} \right) = \frac{16}{3}$, 当且仅当 $\frac{4b}{a} = \frac{a}{b}$, 即 $b = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{2}$ 时取等号, 所以 $\frac{2}{a} + \frac{1}{3b}$ 的最小值为 $\frac{16}{3}$.

13. 【解】(1) 由题意可知随机变量 X 的可能取值为 10, 20, 40, 则有

$P(X=10) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$; $P(X=20) = \frac{C_3^2 C_2^0}{C_5^2} = \frac{3}{10}$; $P(X=40) = \frac{C_3^0 C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$.
 所以随机变量 X 的分布列为

X	10	20	40
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

X 的数学期望 $E(X) = 10 \times \frac{3}{5} + 20 \times \frac{3}{10} + 40 \times \frac{1}{10} = 16$.

(2) 若选择方案一: 此时可以参与 3 次抽奖, 最终消费的期望为 $600 - 3 \times 16 = 552$ 元;

若选择方案二: 最终消费为 $600 \times 0.95 = 570$ 元.

因为 $552 < 570$, 所以选择方案一更优惠.

刷易错

★易错点 求随机变量的均值时因分布列不准确致误

14. 【解】随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3. $X=0$ 表示“第一次取到正品”, 则 $P(X=0) = \frac{A_9^1}{A_{12}^1} = \frac{3}{4}$, $X=1$ 表示“第一次取到次品, 第二次取到正品”, 则 $P(X=1) = \frac{A_3^1 A_9^1}{A_{12}^2} = \frac{9}{44}$,

同理, 可求得 $P(X=2) = \frac{A_3^2 A_9^1}{A_{12}^3} = \frac{9}{220}$, $P(X=3) = \frac{A_3^3 A_9^0}{A_{12}^4} = \frac{1}{220}$.

因此随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

所以随机变量 X 的均值 $E(X) = 0 \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{9}{44} + 2 \times \frac{9}{220} + 3 \times \frac{1}{220} = \frac{66}{220} = \frac{3}{10}$.

【易错警示】求随机变量的均值首先应明确随机变量的取值, 再求出每种取值对应的概率, 最后列出相应的分布列, 根据公式求均值. 在求解此类问题时, 要注意随机变量取值的准确性以及计算的正确性. 本题中的易错之处是试验结果的所有可能情况列举不全, 漏掉了 $X=0$ (即第一次取到正品) 的情况.

7.3.2 离散型随机变量的方差

刷基础

1. A 【解析】因为 $E(X) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.1 = 2$, 所以 $D(X) = (1-2)^2 \times 0.4 + (2-2)^2 \times 0.3 + (3-2)^2 \times 0.2 + (4-2)^2 \times 0.1 = 1$. 故选 A.

2. A 【解析】设 $P(X=0) = p$, $P(X=1) = 1-p$, 所以 $E(X) = 0 \times p + 1 \times (1-p) = 1-p = 0.4$, 所以 $p = 0.6$, $1-p = 0.4$, 所以 $D(X) = (0-0.4)^2 \times 0.6 + (1-0.4)^2 \times 0.4 = 0.24$. 故选 A.

3. C 【解析】由已知可得

$$\begin{cases} -2a + 0 + 2a + 2b = \frac{1}{3}, \\ 2a + a + 2a + b = 1, \end{cases} \text{得 } a = b = \frac{1}{6}.$$

$$D(\xi) = \left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 \times$$

$$\frac{1}{6} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(2 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{11}{9}. \text{ 故选 C.}$$

4. B 【解析】随机变量 X 服从两点分布, 且 $P(X=1) = \frac{k}{k+3}, P(X=0) = \frac{3}{k+3},$

$$E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = \frac{k}{k+3} = 1 - \frac{3}{k+3},$$

当 k 增大时, $\frac{3}{k+3}$ 减小, 因此 $E(X)$ 增大.

$$\text{两点分布的方差公式为 } D(X) = p(1-p), \text{ 其中 } p = P(X=1), \text{ 故 } D(X) = \frac{k}{k+3} \cdot \left(1 - \frac{k}{k+3}\right) = \frac{3k}{(k+3)^2} = \frac{3}{k + \frac{9}{k} + 6},$$

由对勾函数的性质可知, 当 $k \geq 3$ 时, $k + \frac{9}{k}$ 随着 k 的增大而增大, 因此分母 $k + \frac{9}{k} + 6$ 增大, 则 $D(X)$ 减小.

综上, 随着 k 的增大, $E(X)$ 增大, $D(X)$ 减小. 故选 B.

5. 【解】(1) 记甲第 i 次射中并获胜为 A_i ($i=1, 2, 3$), 则 A_1, A_2, A_3 彼此互斥,

记事件 B 表示甲获胜, 则 $P(A_1) = \frac{1}{3},$

$$P(A_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, P(A_3) = \frac{2}{3} \times$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27},$$

$$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) +$$

$$P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27}.$$

(2) X 的所有可能的取值为 1, 2, 3, 则

$$P(X=1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3},$$

$$P(X=2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{9},$$

$$P(X=3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{9}.$$

☞ 悟: $X=3$ 包含甲获胜、乙获胜和无人获胜三种情况

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$\text{所以 } X \text{ 的均值 } E(X) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{9} +$$

$$3 \times \frac{1}{9} = \frac{13}{9},$$

$$X \text{ 的方差 } D(X) = \left(1 - \frac{13}{9}\right)^2 \times \frac{2}{3} + \left(2 - \frac{13}{9}\right)^2 \times \frac{2}{9} + \left(3 - \frac{13}{9}\right)^2 \times \frac{1}{9} = \frac{38}{81}.$$

特别注意 对于离散型随机变量的分布列的计算, 应先确定随机变量所有可能的取值, 再利用排列组合与古典概型等知识求出随机变量每一种取值情况的概率, 最后利用公式计算期望和方差. 注意在取球模型中摸出的球有放回与无放回的区别.

6. D 【解析】由题意可知 $a + 2a + \frac{1}{4} = 1,$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{4},$$

$$\text{则 } E(\xi) = -1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} = 0,$$

$$\text{则 } D(\xi) = (-1-0)^2 \times \frac{1}{4} + (0-0)^2 \times$$

$$\frac{1}{2} + (1-0)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

所以 $D(2\xi-1) = 4D(\xi) = 2$. 故选 D.

7. C 【解析】由 $3X+Y=1$ 可得 $Y=1-3X$, 再由方差的性质得 $D(Y) = (-3)^2 \cdot D(X) = 9 \times 0.01 = 0.09$, 故选 C.

8. D 【解析】由题意可知, X 的可能取值为 0, 1, 2, 4,

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times 2}{A_4^4} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}, P(X=2) =$$

$$\frac{C_4^2 \times 1}{A_4^4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}, P(X=4) = \frac{1}{A_4^4} = \frac{1}{24},$$

$$P(X=0) = 1 - P(X=1) - P(X=2) -$$

$$P(X=4) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{3}{8},$$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times$$

$$\frac{1}{24} = 1,$$

$$\text{则 } D(X) = (0-1)^2 \times \frac{3}{8} + (1-1)^2 \times \frac{1}{3} +$$

$$(2-1)^2 \times \frac{1}{4} + (4-1)^2 \times \frac{1}{24} = 1,$$

所以 $D(2X) = 2^2 \times D(X) = 4 \times 1 = 4$, 故选 D.

9. A 【解析】由题可知 $n + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1$, 解

$$\text{得 } n = \frac{1}{6},$$

$$\text{因为 } E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + m \times \frac{1}{6} =$$

$$\frac{2}{3}, \text{ 所以 } m = 2,$$

$$\text{所以 } E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} = 1,$$

$$\text{则 } D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9},$$

$$\text{故 } D(-2X) = (-2)^2 D(X) = \frac{20}{9}. \text{ 故}$$

选 A.

链接教材 本题是教材第 69 页例 5 的变式, 考查方差与期望的关系, 当题中已知 $E(X), E(X^2)$ 或这两者的值易求时, 可利用 $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ 求方差.

10. B 【解析】因为 $E(\xi) = \frac{1-p}{2} + 1 + \frac{3p}{2} =$

$$p + \frac{3}{2}, E(\xi^2) = \frac{1-p}{2} + 2 + \frac{9p}{2} = 4p + \frac{5}{2},$$

$$\text{所以 } D(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2 = 4p +$$

$$\frac{5}{2} - \left(p + \frac{3}{2}\right)^2 = -p^2 + p + \frac{1}{4} =$$

$$-\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

所以当 p 在 $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 内逐渐增大时,

$E(\xi)$ 增大, 由二次函数的性质可知, $D(\xi)$ 先增大后减小. 故选 B.

11. 0.1 0.2 【解析】由 $E(X) = 1.2$, 得 $0 \times p + 1 \times 0.6 + 2 \times (0.4 - p) = 1.2$, 因此 $p = 0.1$.

依题意, $E(X) = 1.4 - 2p, E(X^2) = 0^2 \times$

$$p + 1^2 \times 0.6 + 2^2 \times (0.4 - p) = 2.2 - 4p,$$

$$\text{因此 } D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2.2 - 4p - (1.4 - 2p)^2 = -4(p - 0.2)^2 + 0.4,$$

则当 $p = 0.2$ 时, $D(X)$ 取得最大值.

12. 【解】(1) 由离散型随机变量分布列的性质可知 $a + 0.1 + 0.6 = 1$, 解得 $a = 0.3$. 同理 $0.3 + b + 0.3 = 1$, 解得 $b = 0.4$.

$$(2) E(\xi) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.6 = 2.3,$$

$$E(\eta) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.3 = 2,$$

$$D(\xi) = (1-2.3)^2 \times 0.3 + (2-2.3)^2 \times 0.1 + (3-2.3)^2 \times 0.6 = 0.81,$$

$$D(\eta) = (1-2)^2 \times 0.3 + (2-2)^2 \times 0.4 + (3-2)^2 \times 0.3 = 0.6.$$

由于 $E(\xi) > E(\eta)$, 说明在队内对抗赛中, 甲的平均得分比乙高, 但 $D(\xi) > D(\eta)$, 说明甲得分的稳定性不如乙, 因此甲、乙两人技术水平都不够全面, 各有优势与劣势.

名师点拨 此类题一般先比较均值, 如果均值相等, 则一般要用到方差. 方差作为离散型随机变量的一个重要数字特征, 刻画了随机变量取值的稳定与波动、集中与离散的程度, 方差较小的比较稳定.

13. 【解】(1) 该考生得 6 分的概率 $P =$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{C_4^2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{C_4^3} = \frac{5}{24}.$$

(2) 设该考生“盲选 1 个选项”得分为 X , X 的可能取值为 0, 2, 3,

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4},$$

所以 X 的期望 $E(X) = 0 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} +$

$$3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2},$$

X 的方差 $D(X) = \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{3}{8} +$

$$\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{3}{8} + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

设该考生“盲选 2 个选项”得分为 Y , Y 的可能取值为 0, 4, 6,

$$P(Y=0) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{C_4^2} + \frac{1}{2} \times \frac{C_3^1}{C_4^2} = \frac{2}{3},$$

$$P(Y=4) = \frac{1}{2} \times \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{4},$$

$$P(Y=6) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{12},$$

所以 Y 的期望 $E(Y) = 0 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{4} +$

$$6 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{2} = E(X),$$

Y 的方差 $D(Y) = \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{2}{3} +$

$$\left(4 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(6 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{12} = \frac{19}{4} >$$

$D(X)$.

“盲选 1 个选项”和“盲选 2 个选项”虽然得分期望值相同,但是 $D(X) < D(Y)$, 所以应选择“盲选 1 个选项”作为最优答题方式.

第 7.3 节综合训练

刷能力

1. A 【解析】由题意可知随机变量 X 服从两点分布, 且其所有可能取值为 0, 1,

则 $P(X=1) = p, P(X=0) = 1-p$, 故 $E(X) = p, D(X) = p(1-p)$,

$$\text{则 } \frac{1-9D(X)}{E(X)} = \frac{1-9p(1-p)}{p} =$$

$$\frac{9p^2-9p+1}{p} = 9p + \frac{1}{p} - 9 \geq 2\sqrt{9p \cdot \frac{1}{p}} -$$

$$9 = -3,$$

当且仅当 $9p = \frac{1}{p}$, 即 $p = \frac{1}{3}$ 时取等号.

故选 A.

2. A 【解析】由题得, X 的可能取值为 3, 4, 5, 6,

$$P(X=3) = \frac{C_6^3}{(C_6^3)^2} = \frac{20}{400},$$

$$P(X=4) = \frac{C_6^3 C_3^2 C_3^1}{(C_6^3)^2} = \frac{180}{400},$$

$$P(X=5) = \frac{C_6^3 C_3^1 C_3^2}{(C_6^3)^2} = \frac{180}{400},$$

$$P(X=6) = \frac{C_6^3 C_3^3}{(C_6^3)^2} = \frac{20}{400},$$

$$\text{故 } E(X) = 3 \times \frac{20}{400} + 4 \times \frac{180}{400} + 5 \times \frac{180}{400} + 6 \times$$

$$\frac{20}{400} = \frac{9}{2}, \text{ 故选 A.}$$

多种解法 将 6 门选修课编号为 i ,

$i = 1, 2, \dots, 6$,

设 X_i 为第 i 门选修课是否被选中,

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 门选修课被选中,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 门选修课未被选中,} \end{cases} i =$

$1, 2, \dots, 6$,

则 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_6$,

$$\text{又 } P(X_i=0) = \left(\frac{C_5^3}{C_6^3}\right)^2 = \left(\frac{10}{20}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$P(X_i=1) = 1 - P(X_i=0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$E(X_i) = 1 \times P(X_i=1) + 0 \times P(X_i=0) =$$

$$1 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

所以 $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots +$

$$E(X_6) = 6 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{2}. \text{ 故选 A.}$$

3. D 【解析】由题意得 $n(\Omega) = 3^3 - 1 = 26$, 随机变量 X 的取值为 -2, -1, 0, 1, 2, 3.

$$\text{则 } P(X=-2) = \frac{3}{26}, P(X=-1) = \frac{6}{26} =$$

$$\frac{3}{13}, P(X=0) = \frac{7}{26},$$

$$P(X=1) = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}, P(X=2) = \frac{3}{26},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{26},$$

$$\text{所以 } E(X) = -2 \times \frac{3}{26} - 1 \times \frac{3}{13} + 0 \times \frac{7}{26} + 1 \times$$

$$\frac{3}{13} + 2 \times \frac{3}{26} + 3 \times \frac{1}{26} = \frac{3}{26}.$$

故选 D.

4. B 【解析】由题意可得 X^2, X 的分布列如下表所示:

X	0	1	2
X^2	0	1	4
P	a	b	$\frac{1}{9}$

由分布列的性质可得 $a + b = 1 - \frac{1}{9} =$

$$\frac{8}{9}, \text{ 所以 } a = \frac{8}{9} - b \geq 0, \text{ 则 } 0 \leq b \leq \frac{8}{9}.$$

$$\text{又 } E(X) = 0 + b + 2 \times \frac{1}{9} = b + \frac{2}{9}, E(X^2) =$$

$$0 + b + 4 \times \frac{1}{9} = b + \frac{4}{9},$$

所以 $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = b +$

$$\frac{4}{9} - \left(b + \frac{2}{9}\right)^2 = -b^2 + \frac{5}{9}b + \frac{32}{81}.$$

设该学生物理、历史学考获得 A 等级

的概率分别为 p_1, p_2 , 则有 $p_1 p_2 = \frac{1}{9}$,

则 $b = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1) = p_1 + p_2 -$

$$2p_1 p_2 = p_1 + p_2 - \frac{2}{9} \geq 2\sqrt{p_1 p_2} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9},$$

当且仅当 $p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$ 时取等号, 所以

$$\frac{4}{9} \leq b \leq \frac{8}{9}.$$

因为函数 $f(b) = -b^2 + \frac{5}{9}b + \frac{32}{81}$ 在

$\left[\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right]$ 上单调递减,

$$\text{所以 } D(X) = -b^2 + \frac{5}{9}b + \frac{32}{81} \leq -\left(\frac{4}{9}\right)^2 +$$

$$\frac{5}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{32}{81} = \frac{4}{9}. \text{ 故选 B.}$$

5. ABD 【解析】对于 A, 根据方差的性质, 可得 $D(3X+2) = 3^2 D(X) = 9 \times 3 = 27$, 所以 A 正确;

对于 B, 根据分布列的性质, 可得

$$P(Z=1) + P(Z=2) + P(Z=3) =$$

$$\frac{a}{1 \times (1+1)} + \frac{a}{2 \times (2+1)} + \frac{a}{3 \times (3+1)} = 1, \text{ 即}$$

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{6} + \frac{a}{12} = 1, \text{ 解得 } a = \frac{4}{3}, \text{ 所以 B}$$

正确;

对于 C, 因为 $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$,

所以 $E(X^2) = D(X) + (E(X))^2 = 20 + 6^2 = 56$, 所以 C 错误;

对于 D, 由随机变量 X 的取值是 0, 1

可得, 随机变量 X 服从两点分布,

根据两点分布的期望公式, 可得

$$E(X) = p \times 1 + (1-p) \times 0 = p,$$

$$\text{又 } E(X) = \frac{3}{5}, \text{ 所以 } p = \frac{3}{5}, \text{ 所以}$$

$$D(X) = \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}, \text{ 所}$$

以 D 正确.

故选 ABD.

6. $\frac{27}{8}$ 【解析】蚂蚱跳动 4 次后染上颜色的点的个数 X 的可能取值为 2, 3, 4, 5,

陷阱: 本题的易错点是开始在原点处也会染上颜色, 因为不能原地跳动, 所以 X 的最小值为 2

$X=2$ 表示蚂蚱在 0, 1 或者 0, -1 之间

$$\text{来回跳动, 则 } P(X=2) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times$$

高中必刷题 数学

$$2 = \frac{1}{8};$$

$X=3$ 表示①当蚂蚱由 0 向右最远跳到 2 时,可以为“右右左左”“右左右右”“右右左右”,共 3 种情况,②由对称性知当由 0 向左最远跳到 -2 时,也有 3 种情况,③当由 0 向左最远跳到 -1,向右最远跳到 1 时,可以为“左右右左”“右左左右”,共 2 种情况,

故一共有 8 种情况,则 $P(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 8 = \frac{1}{2};$

$X=4$ 表示蚂蚱跳动为“右右右左”“左左左右”“左右右右”“右左左左”,共 4 种情况,则 $P(X=4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 4 = \frac{1}{4};$

$X=5$ 表示蚂蚱跳动为“右右右右”“左左左左”,共 2 种情况,

则 $P(X=5) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 = \frac{1}{8},$ 则

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 5 \times$$

$$\frac{1}{8} = \frac{27}{8}.$$

7. 【解】(1) 用 A, B, C 分别表示事件:“设备在检测过程中,部件甲、乙、丙需要调试”,

则 $P(A) = 0.1, P(B) = 0.3, P(C) = 0.4,$

用 D 表示事件:“设备在检测过程中,部件甲、乙中至少有 1 个需要调试”,

则 $D = \overline{A}\overline{B} \cup \overline{B}\overline{A} \cup \overline{A}B,$

$P(D) = P(\overline{A}\overline{B} \cup \overline{B}\overline{A} \cup \overline{A}B) = P(A) \times P(\overline{B}) + P(B)P(\overline{A}) + P(A)P(B) = 0.1 \times 0.7 + 0.3 \times 0.9 + 0.1 \times 0.3 = 0.37.$

所以部件甲、乙中至少有 1 个需要调试的概率为 0.37.

(2) X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,
 $P(X=0) = P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 0.9 \times 0.7 \times 0.6 = 0.378,$

$P(X=1) = P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{B}\overline{A}C) + P(C\overline{A}\overline{B}) = 0.1 \times 0.7 \times 0.6 + 0.3 \times 0.9 \times 0.6 + 0.4 \times 0.9 \times 0.7 = 0.456,$

$P(X=2) = P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}BC) + P(\overline{A}BC) = 0.1 \times 0.3 \times 0.6 + 0.1 \times 0.7 \times$

$$0.4 + 0.9 \times 0.3 \times 0.4 = 0.154,$$

$$P(X=3) = P(ABC) = 0.1 \times 0.3 \times 0.4 = 0.012,$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.378	0.456	0.154	0.012

故 X 的数学期望为 $E(X) = 0 \times 0.378 + 1 \times 0.456 + 2 \times 0.154 + 3 \times 0.012 = 0.8.$

刷素养

8. $m \left[1 - \left(1 - \frac{1}{m} \right)^n \right]$ 【解析】设事件 A :

对于一个盒子,它至少装有一个球,则

$$P(A) = 1 - \left(1 - \frac{1}{m} \right)^n,$$

点悟: $1 - \frac{1}{m}$ 表示 1 个球放进除

这个盒子外其他盒子的概率

所以 $E(X) = m \cdot P(A) =$

$m \left[1 - \left(1 - \frac{1}{m} \right)^n \right]$, 即装有球的盒子的

个数的期望是 $m \left[1 - \left(1 - \frac{1}{m} \right)^n \right].$